Analiza niepewności pomiarów

Przykłady

Dr hab. inż. Paweł Majda

www.pmajda.zut.edu.pl

Przykład szacowania niepewności pomiaru

Przykład ten obrazuje szacowanie niepewności dla przypadku pośredniego pomiaru ze sprawdzeniem korelacji wielkości wejściowych.

Wykorzystując metodę techniczną wykonano serię równoczesnych pomiarów napięcia *U* i natężenia *I*. W celu oceny nieznanej wartości rezystancji R badanego rezystora pomiary wykonano woltomierzem o zakresie 10 V i wskaźniku klasy 0,2 oraz amperomierzem o zakresie 3 A i wskaźniku klasy 0,2. Otrzymano następujące wyniki:

U=(9,1; 10,0; 8,9; 9,8; 9,2) V oraz
I=(2,5; 2,6; 2,3; 2,7; 2,4) A.

Wartości średnie wynoszą odpowiednio:

$$\hat{U} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{5} U_i = 9{,}4 \qquad V$$

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{5} I_i = 2{,}5 \qquad A$$

$$\hat{R} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{9{,}4}{2{,}5} = 3{,}76 \qquad \Omega$$

Przykład szacowania niepewności pomiaru

Niepewności standardowe obliczone metodą A wynoszą:

$$u_{AU} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(U_i - \hat{U}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(U_i - 9{,}4\right)^2} = 0{,}212 \quad V$$

$$u_{AI} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(I_i - \hat{I}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot (5-1)} \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(I_i - 2{,}5\right)^2} = 0{,}071 \quad A$$

Niepewność wnoszoną do wyniku pomiaru rezystancji przez aparaturę pomiarową szacujemy metodą typu B. Zakładając, że błędy przyrządów, których wartości graniczne są określone wskaźnikami ich klas dokładności mają rozkład jednostajny to niepewność standardową typu B jest opisana zależnością:

$$u_B = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}} \qquad \text{gdzie:} \qquad \delta_{kl} = \frac{\pm \Delta_g}{Z_{\max}} \cdot 100\%$$

czyli: $\Delta_{gU} = \delta_{klU} \cdot Z_{\max U} \cdot {}^{1}\!/_{100} = 0{,}2 \cdot {}^{10}\!/_{100} = 0{,}02 \quad V$

$\Delta_{gI} = \delta_{klI} \cdot Z_{\max I} \cdot {}^{1}\!/_{100} = 0{,}2 \cdot {}^{3}\!/_{100} = 0{,}006 \quad A$

zatem: $u_{BU} = \frac{0{,}02}{\sqrt{3}} = 0{,}012 << u_{AU} = 0{,}212$

$u_{BI} = \frac{0{,}006}{\sqrt{3}} = 0{,}003 << u_{AI} = 0{,}071$

pominąć jako nieistotne

Przykład szacowania niepewności pomiaru

Badamy korelację między zmiennymi wejściowymi. Estymator współczynnika korelacji obliczamy z zależności:

$$r_{UI} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\left(U_i - \hat{U}\right)\cdot\left(I_i - \hat{I}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(U_i - \hat{U}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{5}\left(I_i - \hat{I}\right)^2}} = \frac{0{,}26}{\sqrt{0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 0{,}87$$

Duża wartość współczynnika korelacji wskazuje na znaczną zależność między zmiennymi. Uwzględniamy zatem kowariancję w obliczeniach złożonej niepewności standardowej dla pomiaru rezystancji.

$$u_{cR} = \sqrt{\left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{U}}\right)^2 \cdot u_{AU}{}^2 + \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{I}}\right)^2 \cdot u_{AI}{}^2 + 2 \cdot \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{U}} \cdot \frac{\partial \hat{R}}{\partial \hat{I}} \cdot u_{AU} \cdot u_{AI} \cdot r_{UI}} \qquad \hat{R} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

$$u_{cR} = \sqrt{0{,}4^2 \cdot 0{,}212^2 + \left(-1.504\right)^2 \cdot 0{,}071^2 + 2 \cdot \left(-0{,}61\right) \cdot 0{,}212 \cdot 0{,}071 \cdot 0{,}87} = 0{,}0511 \quad \Omega$$

$$U_R = k \cdot u_{cR} = 2 \cdot 0{,}051 = 0{,}102 \approx 0{,}10 \quad \Omega$$

Przykład szacowania niepewności pomiaru

Ostateczny wynik pomiaru rezystancji wynosi:

$$\hat{R} = 3{,}76 \pm 0{,}10 \quad \Omega \quad ; k=2$$

Sprawdzając, jaką wartość miałaby niepewność gdyby nie uwzględniono w obliczeniach kowariancji otrzymano:

$$u_{cR} = 0{,}1363 \quad \Omega$$

$$U_R = 0{,}273 \approx 0{,}27 \quad \Omega$$

$$\hat{R} = 3{,}76 \pm 0{,}27 \quad \Omega \quad ; k=2$$

Wnioski: Zaniedbując kowariancję w powyższym zadaniu otrzymano zawyżoną ocenę niepewności pomiaru rezystancji.

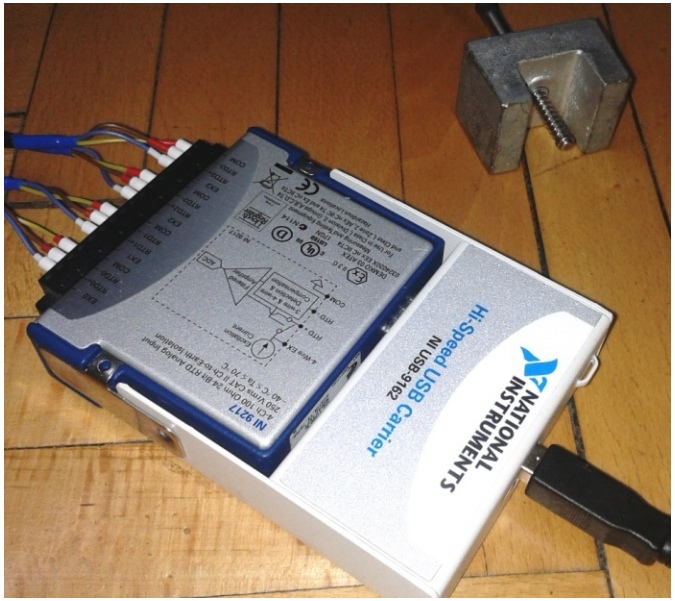
Przykład szacowania niepewności pomiaru temperatury

Wyznaczenie niepewności pomiaru temperatury płyty stalowej, którą mierzono dotykowym czujnikiem rezystancyjnym Pt100 podłączonym w układzie trójprzewodowym do karty akwizycji danych (DAQ). W budżetowaniu niepewności, dla uproszczenia pominięto wpływ stałej czasowej czujnika na wyniki szacowania niepewności. Podejście takie jest uzasadnione w przypadku rejestracji wolnozmiennych procesów.

Metoda pomiarowa – pomiary wykonano dotykowym czujnikiem rezystancyjnym Pt100 o zakresie pomiarowym -20÷80°C. Za pośrednictwem karty zbierania danych mierzono rezystancję czujnika, która w zakresie 0÷850°C jest opisana zależnością:

$$R = R_0 \cdot \left(1 + A \cdot T + B \cdot T^2\right)$$

skąd: $$T = \frac{\sqrt{R_0{}^2 \cdot A^2 + 4 \cdot R_0 \cdot B \cdot R - 4 \cdot R_0{}^2 \cdot B} - R_0 \cdot A}{2 \cdot R_0 \cdot B}$$



Przykład szacowania niepewności pomiaru temperatury

Budżet niepewności
dla pomiaru temperatury materiału z użyciem czujnika rezystancyjnego Pt100

Składowa niepewności złożonej	Źródło niepewności	Typ metody szacowania	Typ rozkładu	Współczynnik rozkładu	$\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u_i^2$ °C²	Udział $\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u_i^2$ w u_{cT}^2 %	Skumulowany udział $\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u_i^2$ w u_{cT}^2 %
u_{MPET25} – Błąd wskazania czujnika przy T=25 °C	przyrząd pomiarowy	B	prostokątny	$\sqrt{3}$	0,013	18,5	84,2
u_{GE} – Błąd nachylenia					0,027	36,6	
u_{OE} – Błąd przesunięcia zera					0,019	26,6	
u_{GD} – Dryft błędu nachylenia					$6 \cdot 10^{-4}$	0,8	
u_{OD} – Dryft błędu przesunięcia zera					0,001	1,7	
u_A – Niepewność oszacowania stałej A	metoda pomiaru				0,019	2,6	15,8
u_B – Niepewność oszacowania stałej B					$7{,}2 \cdot 10^{-6}$	0,01	
u_{R0} – Niepewność oszacowania stałej R_0					0,010	13,2	
Złożona niepewność standardowa u_{cT}=0,27 °C Niepewność rozszerzona U=0,54 °C; k=2						$\sum \approx 100\%$	$\sum \approx 100\%$

W przedstawionym powyżej przykładzie, najsłabszym ogniwem ze względu na udział wnoszony do niepewności pomiaru jest karta zbierania danych. Udział błędów pochodzących od stałych A i B oraz od dryftu karty pomiarowej jest stosunkowo niewielki, bo rozszerzona niepewność pomiaru temperatury obliczona z pominięciem tych składników zmalałaby z 0,54 do 0,53°C. Dlatego w budżetowaniu niepewności można pominąć składowe niepewności dryftu karty oraz stałych A i B bez ryzyka istotnego niedoszacowania niepewności przedmiotowego pomiaru.

Szacowanie niepewności pomiaru metodą randomizacji czyli Monte Carlo
Wg zaleceń przewodnika metoda taka jest akceptowalna

Monte Carlo – pętle randomizacyjne dla wyniku pomiaru przykładowej wielkości $E=F/\delta$

Bez uwzględniania korelacji zmiennych

for $i=1:n$

$$\Delta F = rand \cdot MPE(F)$$

$$\Delta\delta = rand \cdot MPE(\delta)$$

$$E_i^{MC} = \frac{F+\Delta F}{\delta+\Delta\delta}$$

end

rand - losowa liczba z populacji o rozkładzie prostokątnym (lub innym przyjętym do szacowania) z przedziału od -1 do 1

Z uwzględnieniem korelacji zmiennych

for $i=1:n$

$$\Delta F = Fr_i \cdot MPE(F)$$

$$\Delta\delta = \delta r_i \cdot MPE(\delta)$$

$$E_i^{MCr} = \frac{F+\Delta F}{\delta+\Delta\delta}$$

end

Wyrazy wektorów skorelowanych wzajemnie ze sobą o znanym współczynniku korelacji. Elementy tych wektorów przyjmują wartości z przedziału od -1 do 1

W ogólnym przypadku w powyższych pętlach zamiast *MPE* trzeba zastosować niepewność rozszerzoną rozpatrywanych wielkości.

Odchylenie standardowe z populacji randomizowanego wyniku pomiaru jest jego złożoną niepewnością. By otrzymać niepewność rozszerzoną należy .....

Generowanie wektorów skorelowanych z użyciem dekompozycji Choleskiego

1. Zestawić pożądaną macierz współczynników korelacji rozpatrywanych zmiennych w tzw. macierzy korelacji Pearsona np:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ & 1 & 0{,}9 \\ sym & & 1 \end{bmatrix}_{nxn;} \quad n \geq 2$$

2. Dokonać dekompozycji Choleskiego macierzy R by pozyskać trójkątną macierz L

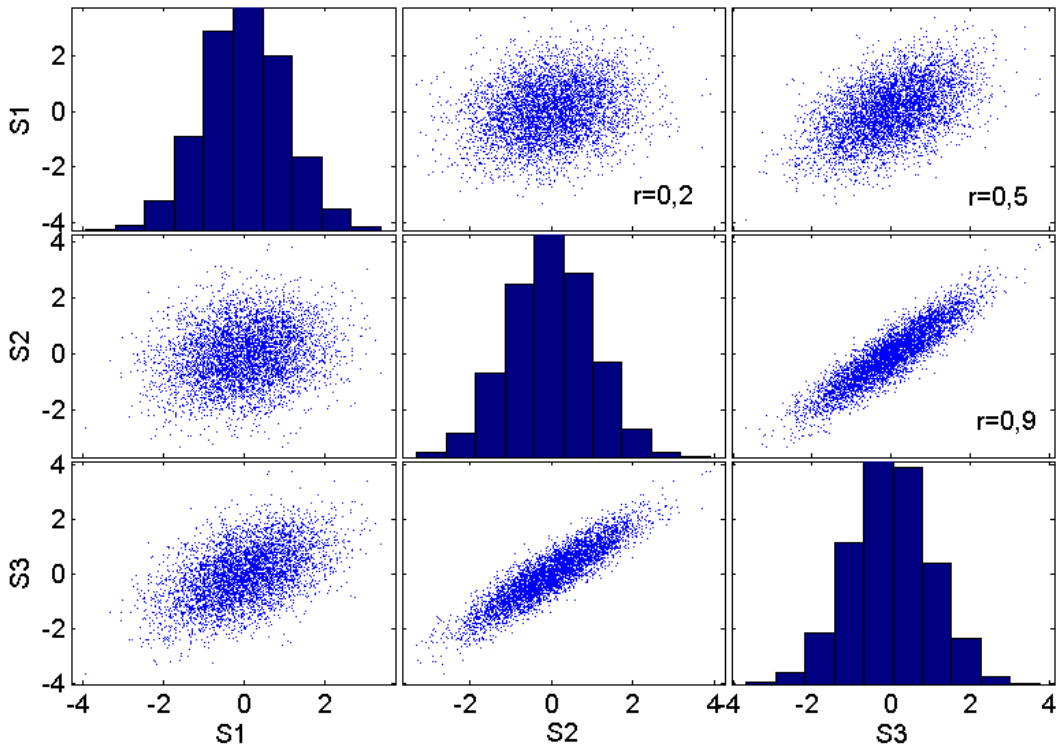
$$R = \mathrm{L}^T \cdot \mathrm{L}$$

3. Obliczyć wektory skorelowane z użyciem macierzy L

$$\mathrm{S} = \mathrm{Z} \cdot \mathrm{L}$$

gdzie:
S - macierz skorelowanych wartości zmiennych losowych,
Z - macierz nieskorelowanych zmiennych losowych (o dowolnych rozkładach),
L - trójkątna macierz dekompozycji Choleskiego.

Generowanie wektorów skorelowanych z użyciem dekompozycji Choleskiego



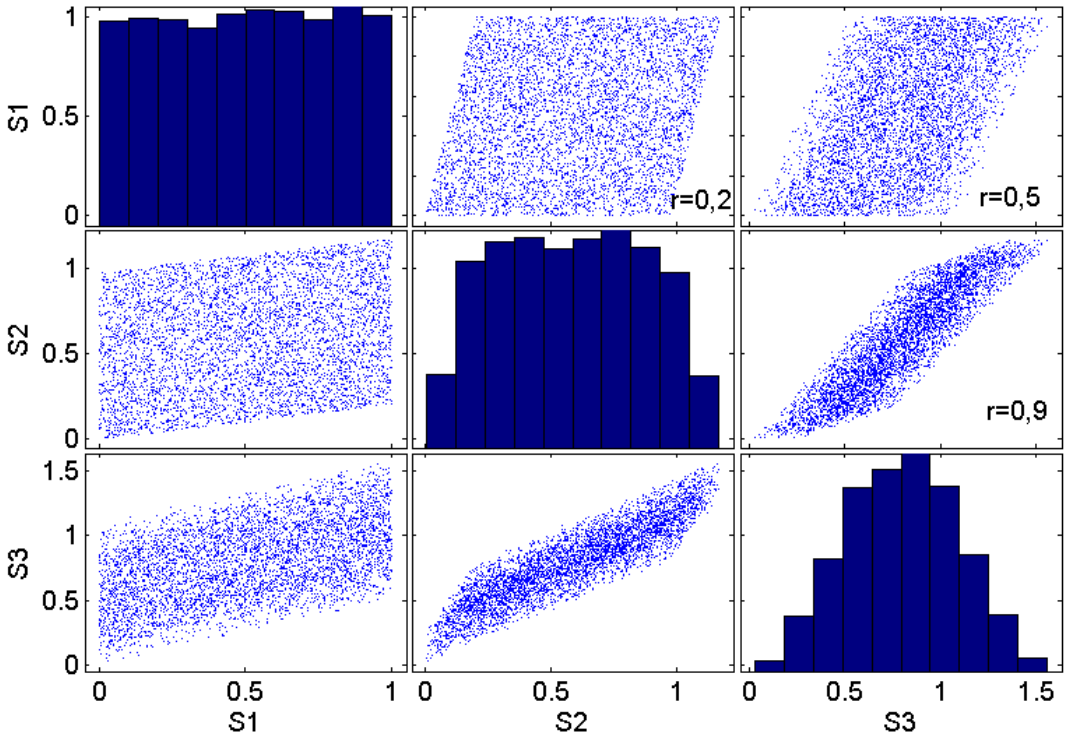

```
% Przykład generowania zmiennych skorelowanych
% R - macierz korelacji liniowej Pearsona
r12=0.2;
r13=0.5;
r23=0.9;
R=[1    r12  r13
   r12  1    r23
   r13  r23  1];
CH = chol(R); %czyli:   CH'*CH=R

% generowanie zmiennych losowych
Los = randn(5000,length(R));
Los_r =Los*CH;
corr(Los_r)
```

```
    1.0000    0.2148    0.5089
    0.2148    1.0000    0.8990
    0.5089    0.8990    1.0000
```

Wizualizacja zmiennych wygenerowanych randomizacyjnie z użyciem dekompozycji Choleskiego dla danych wejściowych o rozkładzie normalnym

Generowanie wektorów skorelowanych z użyciem dekompozycji Choleskiego




```
% Przykład generowania zmiennych skorelowanych
% R - macierz korelacji liniowej Pearsona
r12=0.2;
r13=0.5;
r23=0.9;
R=[1    r12  r13
   r12  1    r23
   r13  r23  1];
CH = chol(R); %czyli:   CH'*CH=R

% generowanie zmiennych losowych
Los = rand(5000,length(R));
Los_r =Los*CH;
corr(Los_r)
```

```
    1.0000    0.2215    0.5195
    0.2215    1.0000    0.9001
    0.5195    0.9001    1.0000
```

Wizualizacja zmiennych wygenerowanych randomizacyjnie z użyciem dekompozycji Choleskiego dla danych wejściowych o rozkładzie prostokątnym

Przykład szacowanie niepewności pomiaru metodą Monte Carlo – porównanie obliczeń randomizacyjnych ze ścisłym rozwiązaniem

Przykład obrazuje szacowanie niepewności złożonej (metodą ścisłą i Monte Carlo) wyniku pomiaru pośredniego wielkości E na podstawie znajomości wyników pomiaru wielkości wejściowych F i δ. Zakłada się, że MPE danych wejściowych są znane: $MPE(F)=\pm 20$, $MPE(\delta)=\pm 2$

$$E = \frac{F}{\delta} = \frac{400}{20} = 20$$

Złożona niepewność standardowa przy założeniu, że zmienne wejściowe są niezależne i mają rozkład prostokątny wyniosłaby:

$$u_c(E) = \sqrt{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \cdot \left(\frac{MPE(F)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{F}{\delta^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{MPE(\delta)}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1{,}29$$

Natomiast uwzględniając korelację z przyjętym a priori współczynnikiem korelacji $r(F,\delta)=0{,}9$:

$$u_c(E^r) = \sqrt{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \cdot \left(\frac{MPE(F)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{F}{\delta^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{MPE(\delta)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \left(-\frac{F}{\delta^2}\right) \cdot \frac{MPE(F)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{MPE(\delta)}{\sqrt{3}} \cdot r(F,\delta)} = 0{,}68$$

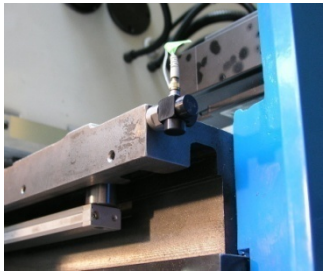
Porównanie wyników rozwiązania ścisłego i otrzymanego metodą Monte Carlo

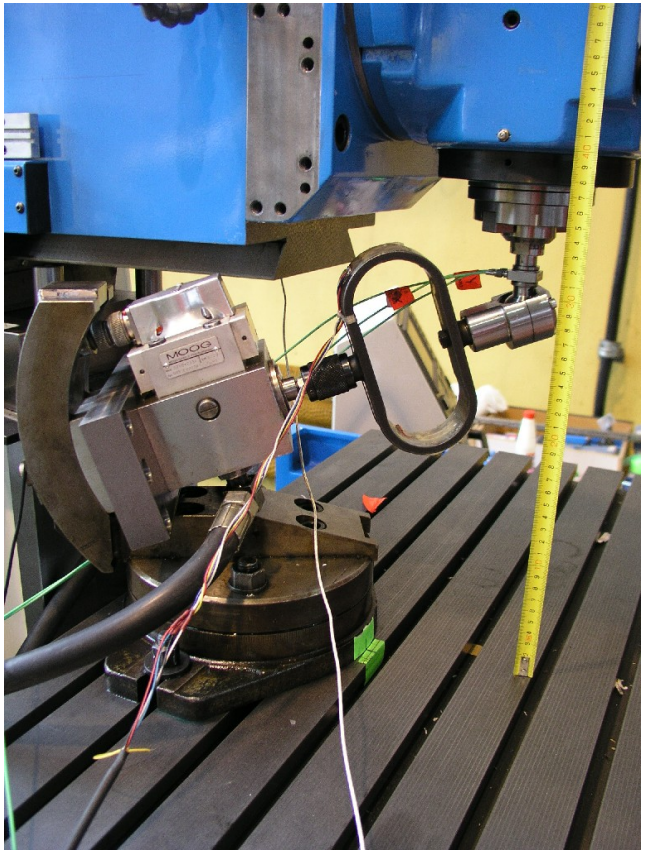
n	20	50	100	1000	5000	10000
rozwiązanie ścisłe E	20					
wartość średnia E^{MC} lub E^{MCr}	20,4	20,15	20,06	20,18	20,08	20,10
różnica %	2	0,7	0,3	0,9	0,4	0,5
rozwiązanie ścisłe $u_c(E)$	1,29					
odchylenie standardowe E^{MC}	1,091	1,256	1,361	1,344	1,288	1,296
różnica %	-15	-2,6	5,5	4,2	-0,2	0,5
rozwiązanie ścisłe $u_c(E^r)$	0,68					
odchylenie standardowe E^{MCr}	0,725	0,701	0,691	0,690	0,689	0,683
różnica %	6,6	3,1	1,6	1,5	1,3	0,4

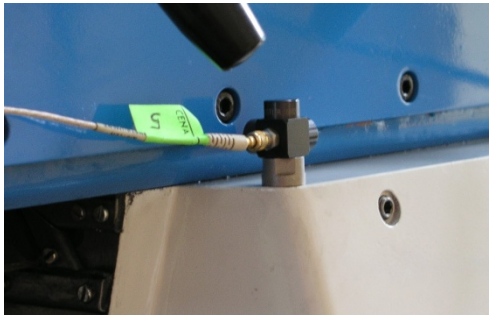
n – liczba powtórzeń pętli randomizacyjnej

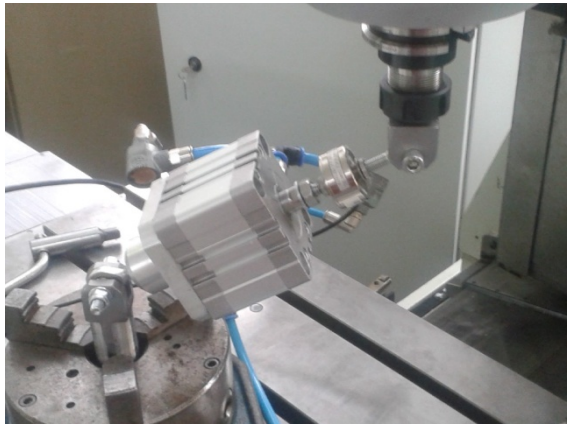
Przykład szacowania niepewności pomiaru sztywności maszyn technologicznych z użyciem akcelerometrów

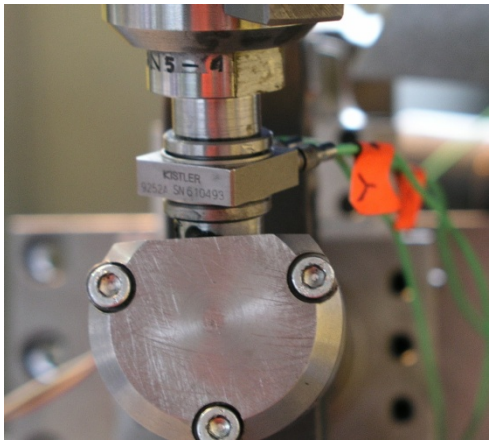
Metody wyznaczania sztywności statycznej obrabiarek
Instytut Technologii Mechanicznej ZUT w Szczecinie







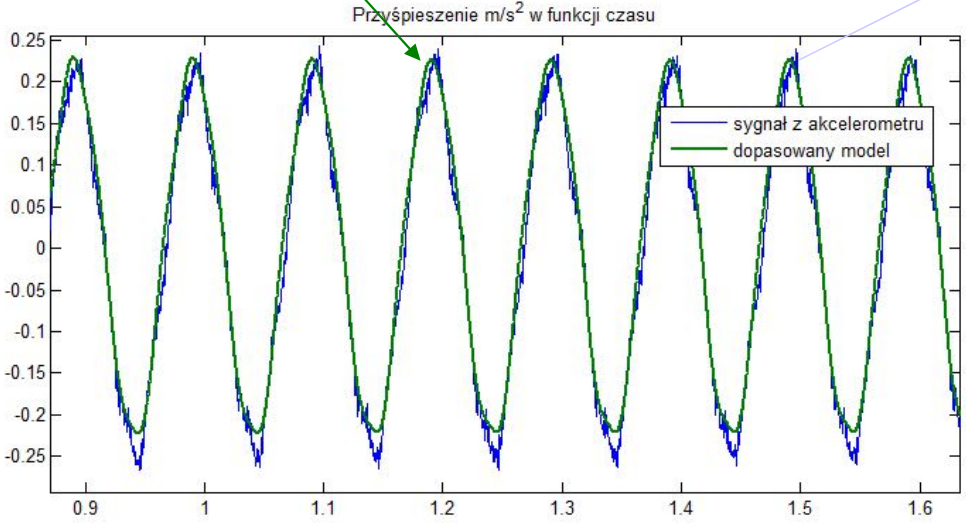


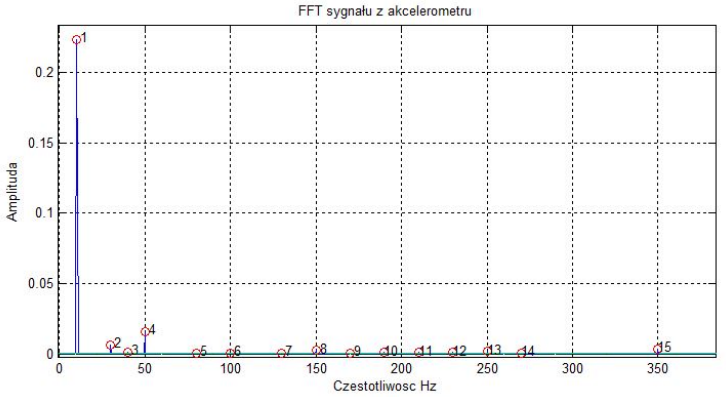


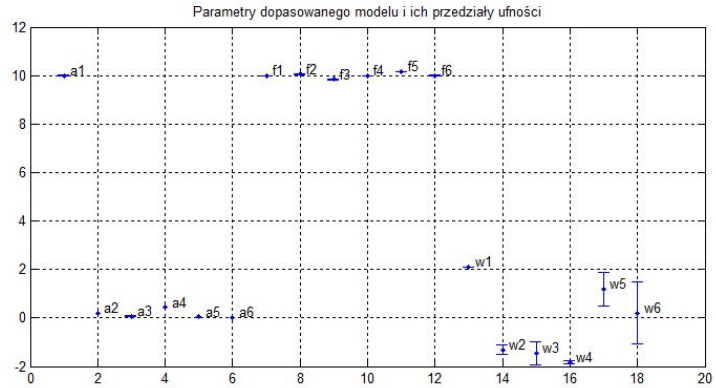
Przeliczanie sygnałów pomiarowych przyśpieszenia na przemieszczenia z użyciem szeregów harmonicznych

Przyśpieszenie mierzone akcelerometrem

$$a = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \sin(2 \cdot i \cdot \pi \cdot f_i \cdot t + \omega_i)$$





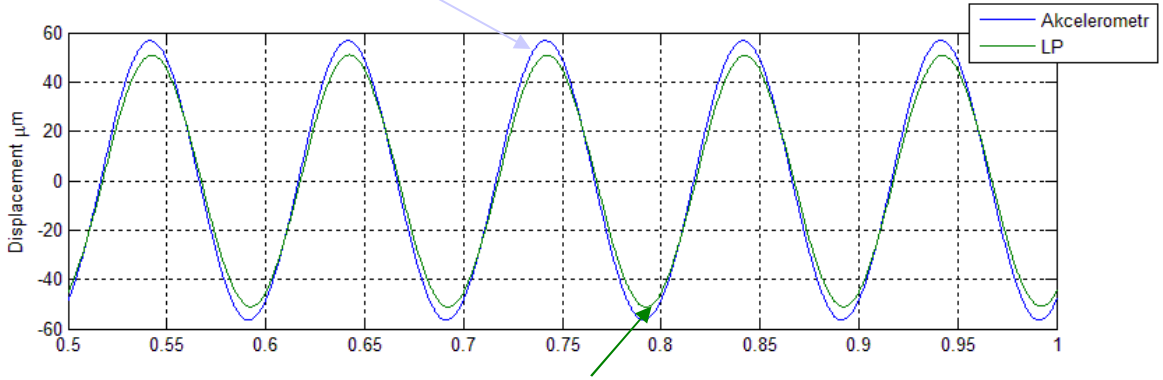


Poszukiwany przebieg czasowy przemieszczenia obliczam z zależności:

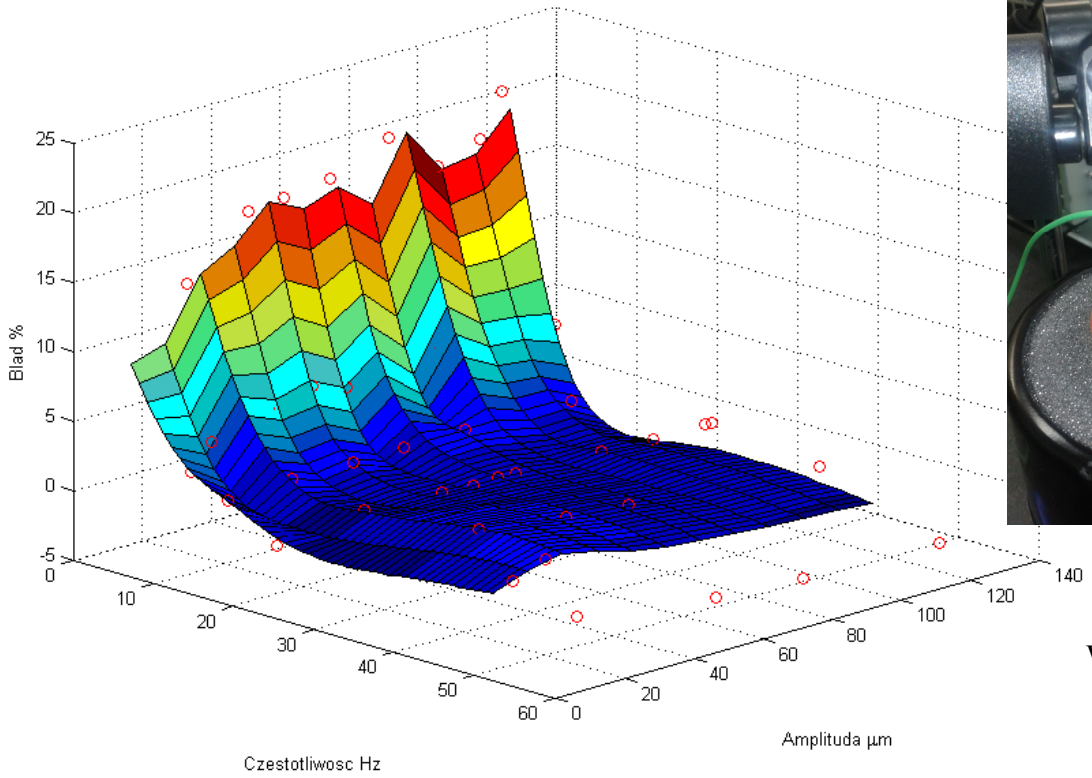
$$\iint a\,dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{-A_i \cdot \sin(2 \cdot i \cdot \pi \cdot f_i \cdot t + \omega_i)}{4 \cdot i^2 \cdot \pi^2 \cdot f_i^2}$$

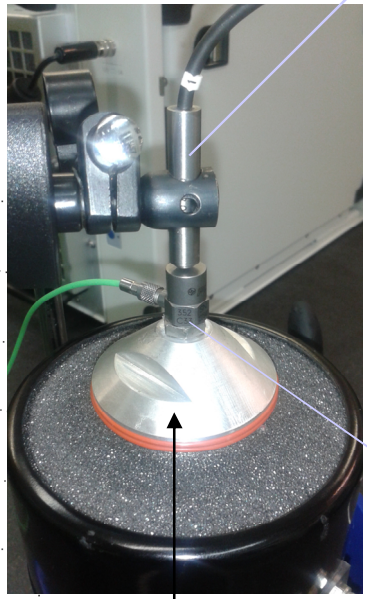
Błąd wyznaczania przemieszczenia ze wskazań akcelerometru

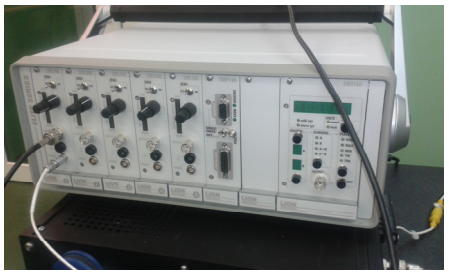
Przemieszczenie estymowane ze wskazań akcelerometru 352C33 firmy PCB (100 mV/g)



Przemieszczenie zmierzone czujnikiem pojemnościowym
firmy LP z dokładnością <13 nm; k=2 w zakresie ±0,125 mm

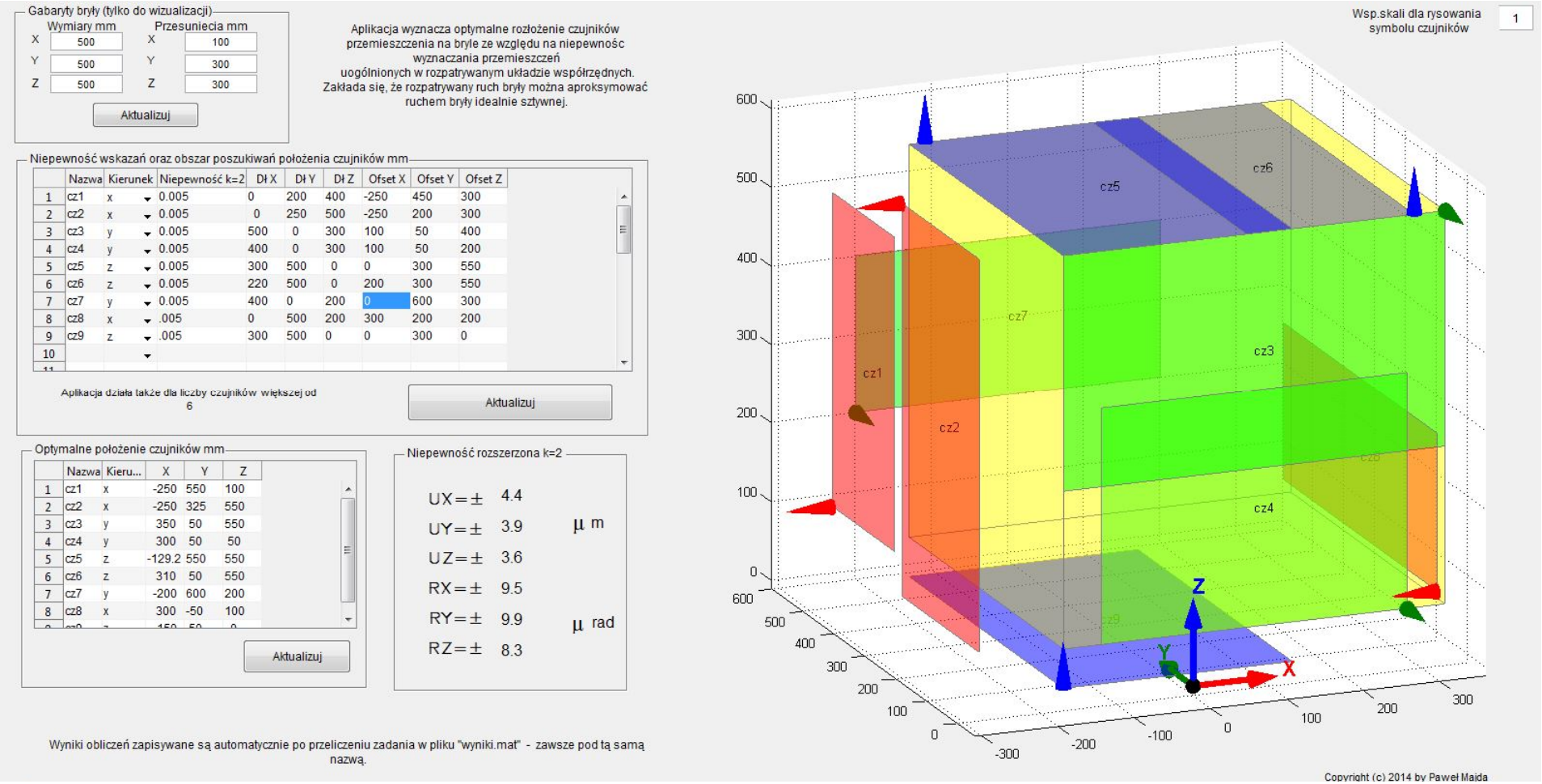






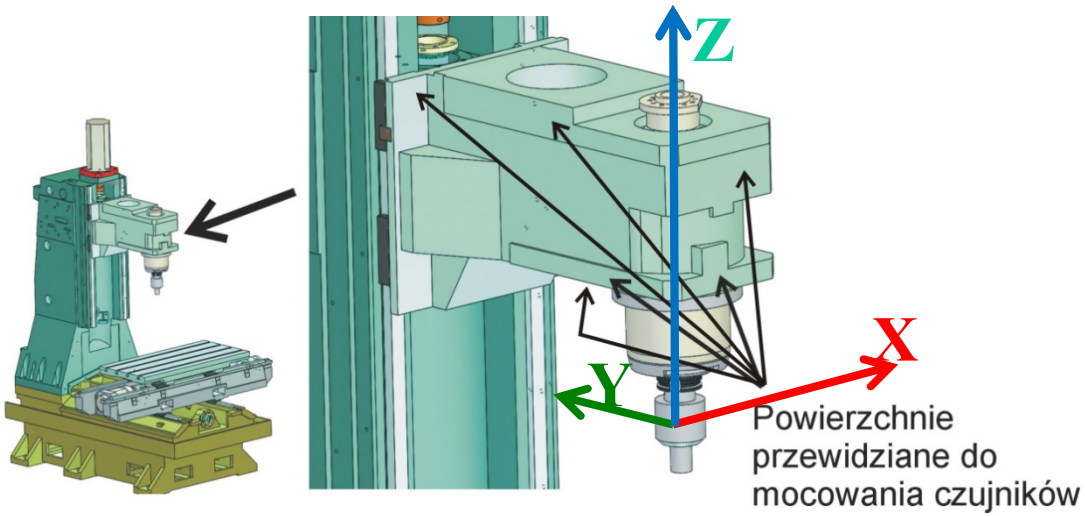
Wzbudnik elektromagnetyczny

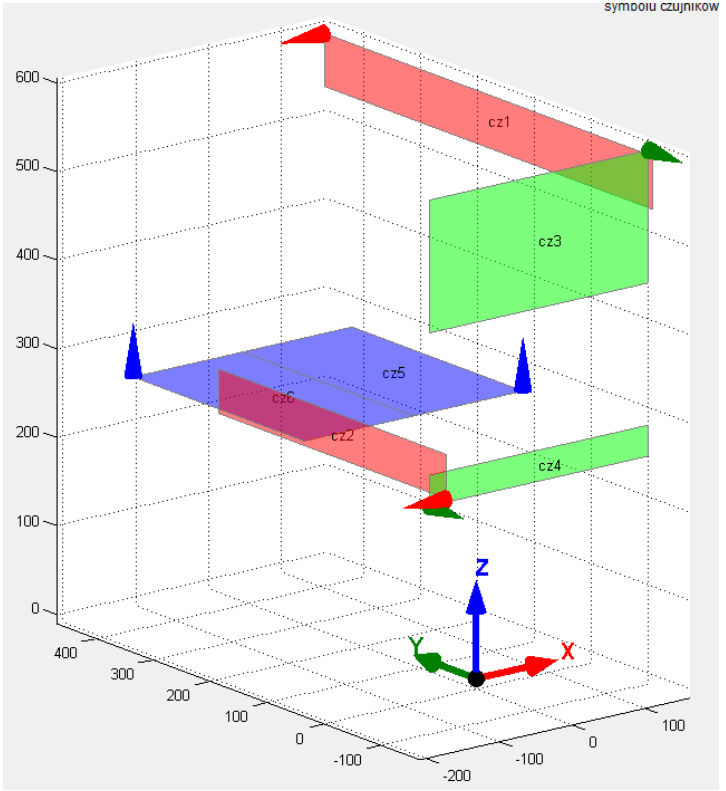
Niepewność wyznaczania przemieszczeń po transformacji ruchu bryły idealnie sztywnej



Zwiększanie liczby czujników → zmniejsza niepewność wyznaczania wsp. uogólnionych
Zwiększanie odległości CS od bryły → pogarsza niepewność wyznaczania wsp. uogólnionych

Niepewność wyznaczania współrzędnych uogólnionych (przemieszczeń) obrabiarki średniej wielkości





cz1	x	150	457.5	590
cz2	x	-150	-140	265
cz3	y	150	-110	595
cz4	y	-150	-110	249.5
cz5	z	150	110	270
cz6	z	-150	410	270

Niepewność rozszerzona k=2

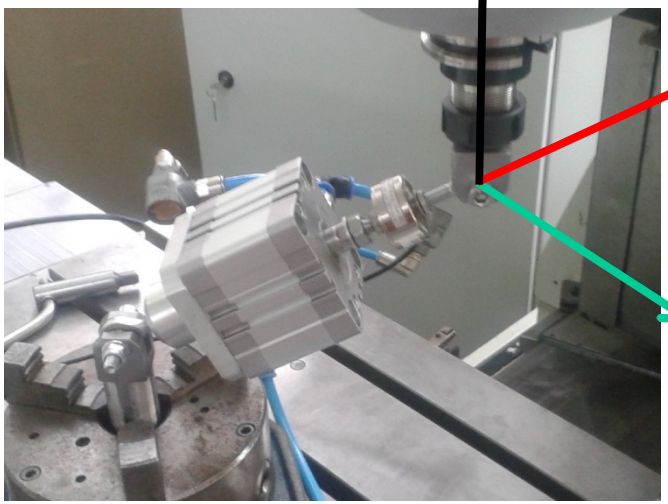
UX = ±	9.1	
UY = ±	8.1	µ m
UZ = ±	5.7	
RX = ±	17.3	
RY = ±	22.3	µ rad
RZ = ±	14.1	

Przy założeniu, że przemieszczenia są wyznaczone z niepewnością 5µm

Szczecin; Paweł Majda

Źródła niepewności pomiaru siły - przykład

Lx=130;Ly=135; Lz=80 ± 2mm



$F_Z = F\cos(\gamma)$

$F_Y = F\cos(\beta)$

$F_X = F\cos(\alpha)$

F.S.=1000N
Stała mostka = 1,49 ± 2%
Liniowość=0,108%F.S.
Histereza=0,121%F.S.
Pełzanie = 0,071 %F.S./10K
Błąd zera = 0,6%F.S.

DC Coupled Measurement Accuracy (NI 4492/4495/4497/4499)

Full-Scale Range (V_{pk})[1]
±0.316
±1.00
±3.16
±10.0

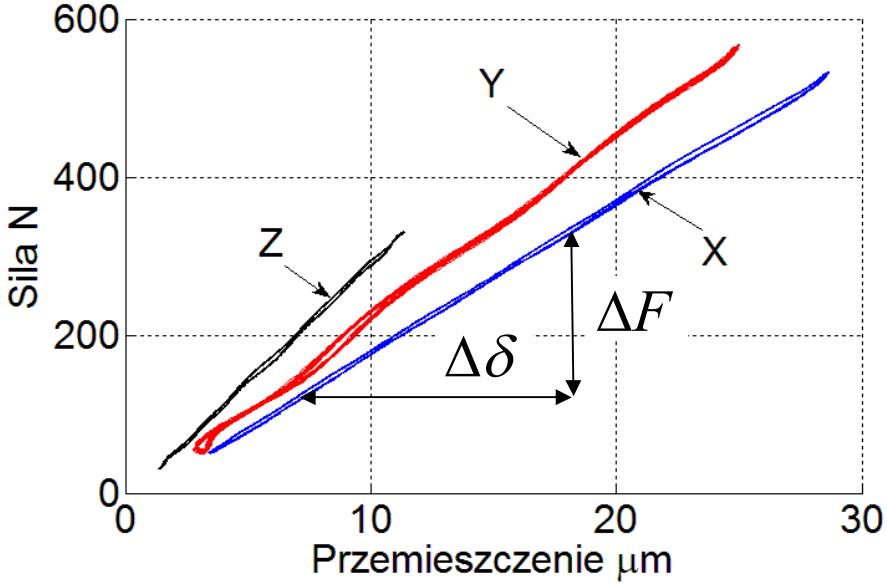
Gain amplitude accuracy
- Operating temperature within 5 °C of last self-calibration temperature ..... 0.5% max
- Over full operating temperature range ..... 1% max

Offset[1]
- Operating temperature within 5 °C of last self-calibration temperature ..... ±500 µV max
- Over full operating temperature range ..... ±1 mV max

Zasilanie mostka = 5V
Dokładność = 0,1%
Błąd zera = 5mV
Pełzanie = 0,01%/K

Wzmacniacz
Wzmocnienie = 1; 2; 4; 8; 50; 100; 200; 400
Dokładność = 0,2%
Liniowość = 0,2%F.S.
Pełzanie = 30ppm/K

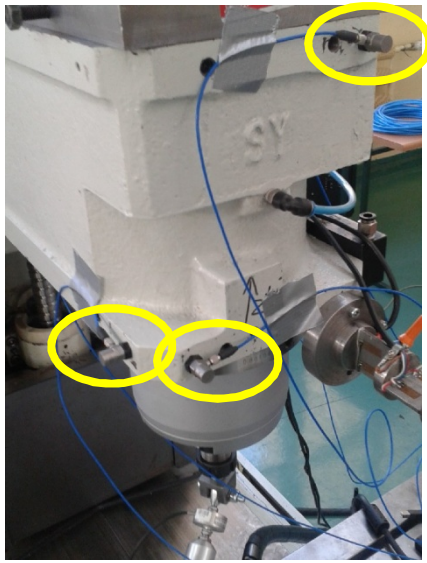
Niepewność wyznaczania sztywności obrabiarki średniej wielkości - przykład



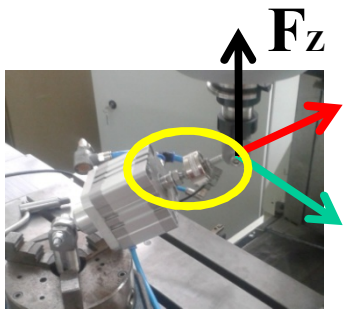
$$k_{x,y,z} = \left| \frac{\Delta F}{\Delta \delta} \right|$$

Przy założeniu, że zakres zmienności wszystkich niezależnych źródeł niepewności można scharakteryzować rozkładem prostokątnym dla k=2 otrzymano:

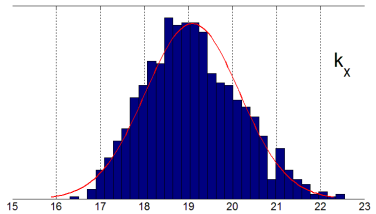
$$k_x = 19{,}0 \pm 2{,}2$$
$$k_y = 23{,}1 \pm 2{,}9$$
$$k_z = 30{,}1 \pm 5{,}9$$
$$\left.\right\} \frac{N}{\mu m}$$



Widok akcelerometrów na wrzecienniku obrabiarki



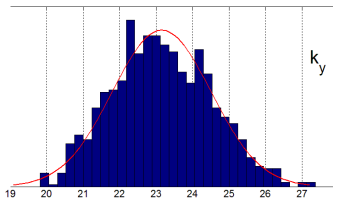
Widok siłownika i siłomierza

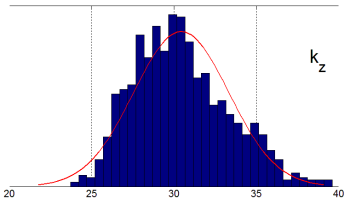


$r_{xy} = 0{,}6$

$r_{yz} = 0{,}9$

$r_{zx} = 0{,}6$





Budżet niepewności w %

źródło niepewności	kx	ky	kz	kx	ky	kz
czujnik 1 wsp. pol. w osi X (pom. na kier. X)	0	0	0	13.7	12.9	13.1
czujnik 1 wsp. pol. w osi Y	0.2	1.1	0.9			
czujnik 1 wsp. pol. w osi Z	0.3	1.3	1.1			
czujnik 2 wsp. pol. w osi X (pom. na kier. X)	0	0	0			
czujnik 2 wsp. pol. w osi Y	2.3	1.0	0.9			
czujnik 2 wsp. pol. w osi Z	2.7	1.2	1.0			
czujnik 3 wsp. pol. w osi X	1.4	0.8	1.8			
czujnik 3 wsp. pol. w osi Y (pom. na kier. Y)	0	0	0			
czujnik 3 wsp. pol. w osi Z	0.4	0.2	0.4			
czujnik 4 wsp. pol. w osi X	1.4	3.3	1.7			
czujnik 4 wsp. pol. w osi Y (pom. na kier. Y)	0	0	0			
czujnik 4 wsp. pol. w osi Z	0.4	0.8	0.4			
czujnik 5 wsp. pol. w osi X	1.9	1.3	3.1			
czujnik 5 wsp. pol. w osi Y	0.4	0.3	0.7			
czujnik 5 wsp. pol. w osi Z (pom. na kier. Z)	0	0	0			
czujnik 6 wsp. pol. w osi X	2.0	1.4	0.9			
czujnik 6 wsp. pol. w osi Y	0.4	0.3	0.2			
czujnik 6 wsp. pol. w osi Z (pom. na kier. Z)	0	0	0			
orientacja siłownika względem osi X	5.7	4.1	2.5	12.8	12.7	14.5
orientacja siłownika względem osi Y	4.4	5.9	2.8			
orientacja siłownika względem osi Z	2.6	2.7	9.2			
dokładność wyznaczania przemieszczeń	58.9	59.2	62.9	58.9	59.2	62.9
stała charakterystyczna siłomierza	8.5	8.9	5.5	8.5	8.9	5.5
liniowość siłomierza	0	0	0			
histereza siłomierza	0	0	0			
stabilność zasilania siłomierza	0.6	0.6	0.4	6.1	6.4	3.9
DAQ siłomierza	3.0	3.2	1.9			
wzmocnienie siłomierza	1.2	1.3	0.8			
liniowość wzmacniacza siłomierza	1.3	1.3	0.8			

6- akcelerometrów, niepewność pozycji akcelerometrów i siłownika ±2 mm

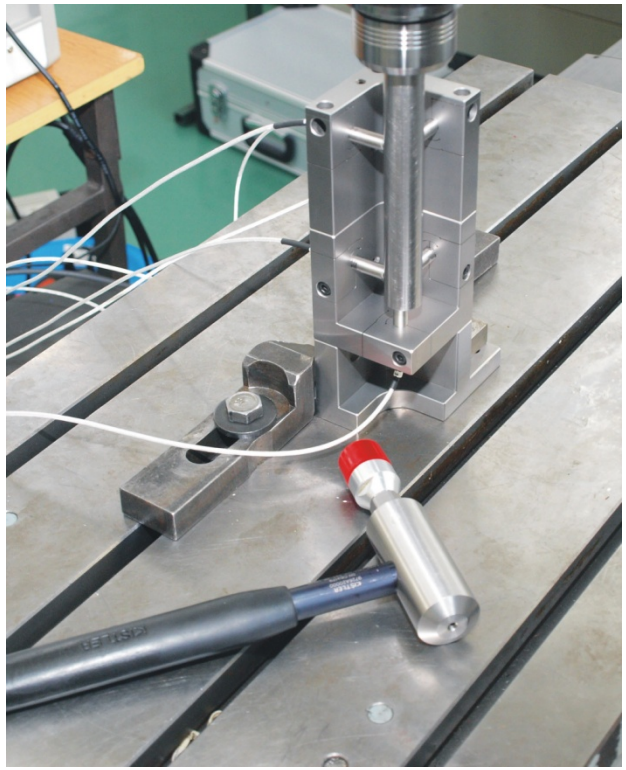
$$\left.\begin{aligned} k_x &= 19{,}0 \pm 2{,}2 \\ k_y &= 23{,}1 \pm 2{,}9 \\ k_z &= 30{,}1 \pm 5{,}9 \end{aligned}\right\} \quad k=2$$

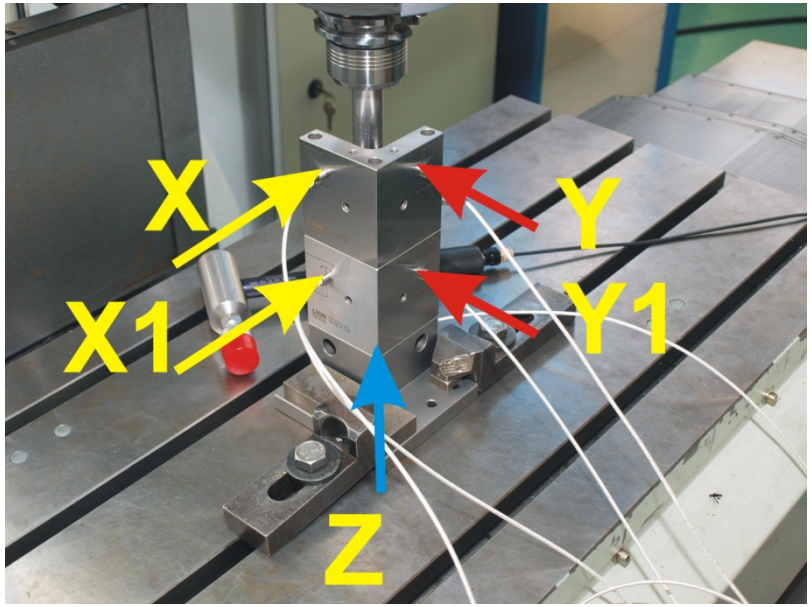
9- akcelerometrów, niepewność pozycji akcelerometrów i siłownika ±1 mm

$$\left.\begin{aligned} k_x &= 19{,}0 \pm 1{,}5 \\ k_y &= 23{,}1 \pm 1{,}6 \\ k_z &= 30{,}1 \pm 4{,}4 \end{aligned}\right\} \quad k=2$$

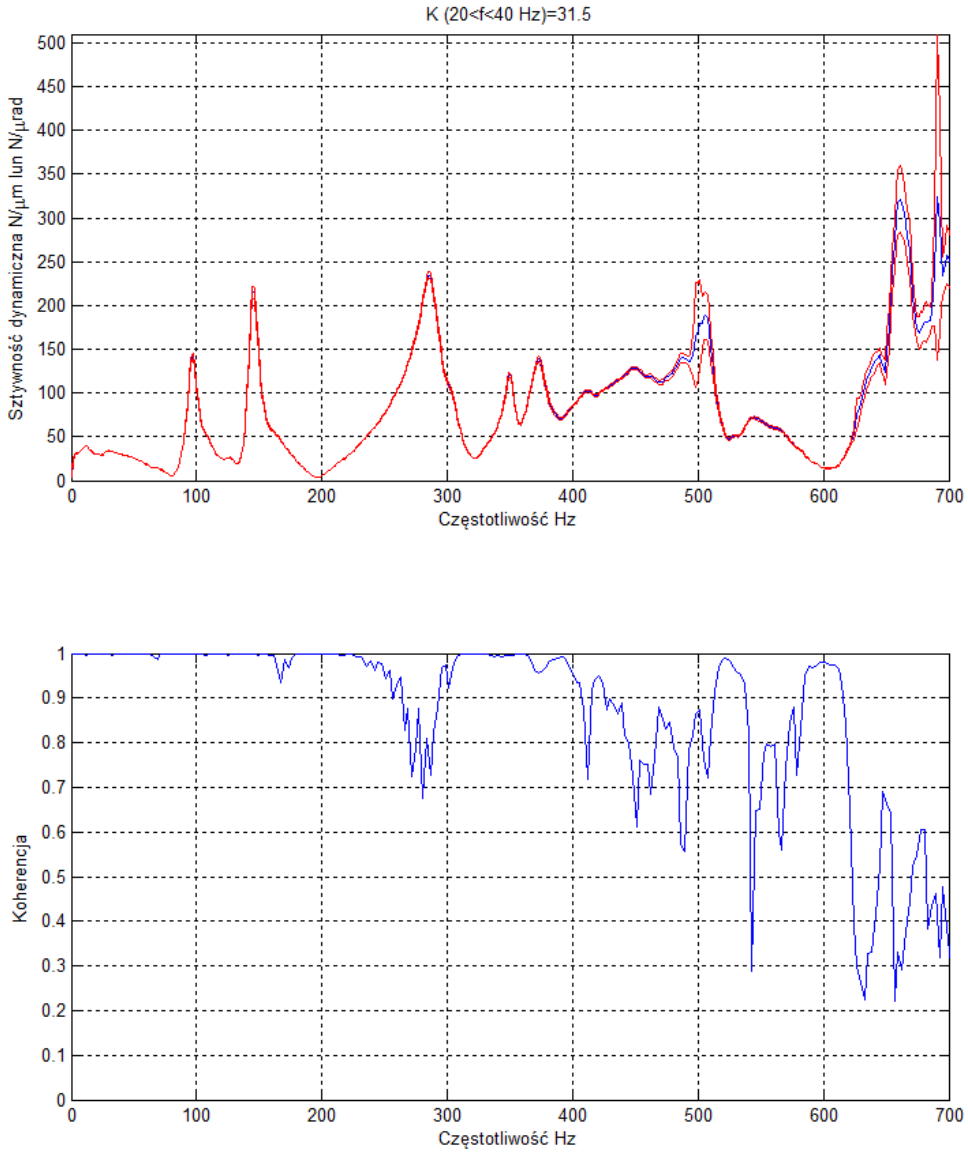
Przykład szacowania powtarzalności wyznaczania częstotliwościowej funkcji przejścia metodą Monte Carlo

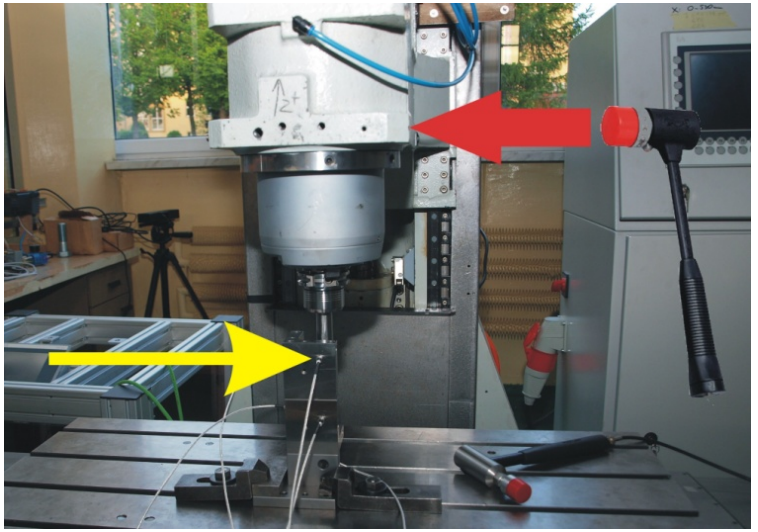
Obliczenia uśredniano dla n wektorów wejściowych i wyjściowych. Liczbę n dobierano tak by eliminować wektory zaniżające koherencję i powtarzalność. Polegało to na eliminacji z zarejestrowanych wektorów tych, które były nietypowe - test 2s.





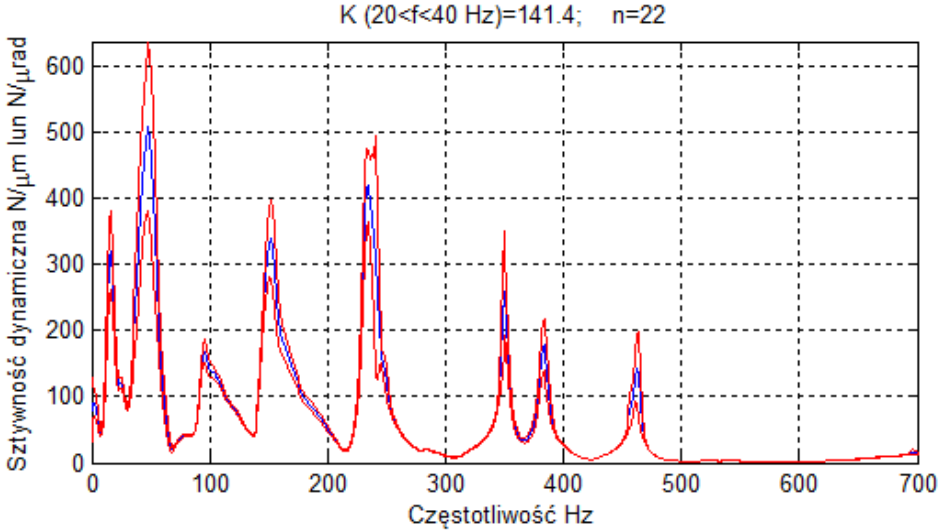
Przykład szacowania powtarzalności wyznaczania częstotliwościowej funkcji przejścia

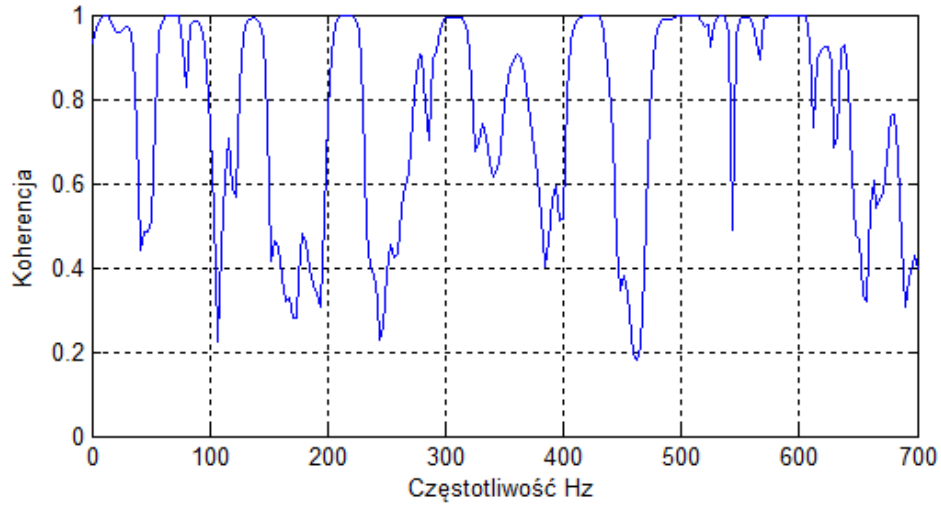


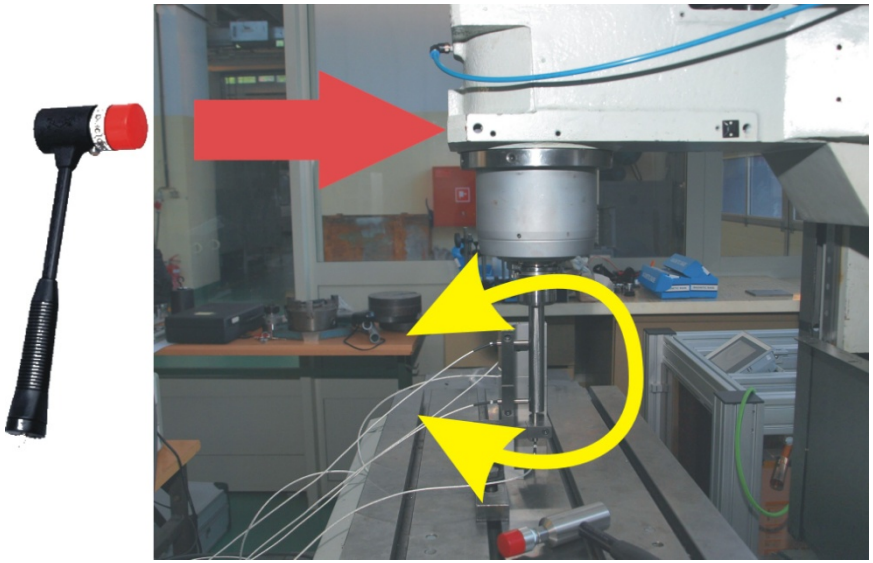


Uderzenie - X wrzeciennik
Odpowiedź - X narzędzie

Przykład szacowania powtarzalności wyznaczania częstotliwościowej funkcji przejścia







Uderzenie - Y wrzeciennik
Odpowiedź - Tilt Y narzędzie

Dziękuję za uwagę